Inhoudsopgave

1. Breuken

Hier wordt het werken met niet decimale breuken bekeken.

Breuken als $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{7}$ Let op : 4½ betekent 4 + ½

Vereenvoudigen van breuken : $\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{a}{b}$ **(teller en noemer delen door k)**

vb. $\frac{12}{45} = \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{4}{15}$

$\frac{48}{20} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ Hier zijn ook nog de helen er uitgehaald ($\frac{12}{5} = \frac{10+2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5}$)

Optellen van breuken : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

Vaak moeten eerst de breuken *gelijknamig* worden gemaakt.

vb $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$

$3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = (3 + \frac{2}{4}) + (5 + \frac{1}{4}) = 3 + \frac{2}{4} + 5 + \frac{1}{4} = 8\frac{3}{4}$

$2\frac{3}{5} - 1\frac{4}{5} = (2 + \frac{3}{5}) - (1 + \frac{4}{5}) = 2 + \frac{3}{5} - 1 - \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$= \frac{13}{5} - \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$ (een andere manier)

Vermenigvuldigen van breuken : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

vb. $\frac{4}{7} \cdot \frac{21}{8} = \frac{4 \cdot 21}{7 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{8} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$3\frac{1}{7} \cdot 5\frac{5}{6} = \frac{22}{7} \cdot \frac{35}{6} = \frac{22 \cdot 35}{7 \cdot 6} = \frac{11 \cdot 5}{1 \cdot 3} = \frac{55}{3} = 18\frac{1}{3}$

Delen van breuken : $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Algemeen: delen door een getal is vermenigvuldigen met de omgekeerde

vb. $\frac{15}{37} : \frac{12}{37} = \frac{15}{37} \cdot \frac{37}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

$7 : 2\frac{1}{3} = 7 : \frac{7}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{7} = 3$

2. Gelijksoortige termen samennemen

Een onderdeel van een optelling of aftrekking noemt men een **term**; een vorm met meerdere termen wordt een **veelterm genoemd.**
Een onderdeel van een vermenigvuldiging of een deling noemt men een **factor**.

vb. in de veelterm $5x + 7y$ zijn de termen $5x$ en $7y$,
in $5x$ zijn 5 en x factoren.

Men onderscheidt **gelijksoortige** termen en **niet-gelijksoortige** termen.

vb. $5x$ en $7x$ zijn gelijksoortige termen (van het soort x),
$4x^2$ en $-18x^2$ zijn gelijksoortige termen (van het soort x^2),
$3a^2b$ en $7a^2b$ zijn gelijksoortige termen (van het soort a^2b),
$4x^2y$ en $7xy^2$ zijn niet-gelijksoortig.

2 Gelijksoortige termen neemt men samen tot één term.

vb. $5x + 7x = 12x$
$4x^2 - 18x^2 = -14x^2$
$-3a^2b - 7a^2b = -10a^2b$
$4x^2y + 6xy$ kan je niet korter schrijven
$\mathbf{4a^2} - 3a \mathbf{+ 6a^2} + 7a \mathbf{- 24a^2} - 8a = \mathbf{4a^2 + 6a^2 - 24a^2} + -3a + 7a - 8a = -14a^2 - 4a$

3. Rekenen met machten

Een macht is een kortere schrijfwijze voor een herhaalde vermenigvuldiging van dezelfde factoren.

vb. $a^3 = a{\cdot}a{\cdot}a$
$7^2 = 7{\cdot}7$
$(-p)^4 = (-p){\cdot}(-p){\cdot}(-p){\cdot}(-p)$
$(x + 3y)^2 = (x + 3y){\cdot}(x + 3y)$

Let op het verschil tussen $-3^2 = -\,3{\cdot}3 = -9$ en $(-3)^2 = (-3){\cdot}(-3) = 9$

Voor het rekenen met machten zijn enkele regels afgeleid

a. Optellen en aftrekken van machten
Alleen gelijksoortige machten kunnen samen worden genomen (zie gelijksoortige termen)

vb. $4x^2 + 9x^2 = 13x^2$
$6x^2 - 8x$: kan je niet korter schrijven

b. Vermenigvuldigen van machten : $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

vb. $a^7 \cdot a^3 = a^{10}$
$4x^2 \cdot 7x^6 = 4 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x^6 = 28x^8$
$x \cdot x^3 = x^1 \cdot x^3 = x^4$ (bij het rekenen met machten is $x^1 = x$)
$9x^2y \cdot 3xy^2 = 27x^3y^3$

c. Delen van machten : $\frac{a^p}{a^p} = 1$ en $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ als $p > q$ en $\frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{q-p}}$ als $p < q$

vb. $\frac{6x^5y^3}{3x^3y^2} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{y^3}{y^2} = 2x^2y$

$\frac{12xy^4}{9xy^5} = \frac{4}{3y}$

d. Macht van een macht : $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

vb. $(x^5)^7 = x^{35}$

e. Macht van een product : $(ab)^p = a^p b^p$

vb. $(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$

$(-x)^6 = (-1)^6 x^6 = x^6$

$(2x^2y^3)^2 = 2^2 x^4 y^6 = 4x^4y^6$

$(3a^2)^3 \cdot 3(a^3)^2 = 27a^6 \cdot 3a^6 = 81a^{12}$

$\frac{(5p^2q)^2}{(pq^2)^3} = \frac{25p^4q^2}{p^3q^6} = \frac{25p}{q^4}$

4. Rekenen met wortels

$\sqrt{a}$ is het getal dat in het kwadraat a geeft.

vb. $\sqrt{16} = 4$ want $4^2 = 16$

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ want $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Veel wortels zijn alleen te **benaderen** tot een decimaal getal, daarvoor gebruiken we onze rekenmachine.
Het is gebruikelijk in de wiskunde om de wortels vereenvoudigd te laten staan in het antwoord, als er niet naar een benadering wordt gevraagd.
Voor het werken met wortels zijn wat regels afgeleid.

a. Optellen en aftrekken van wortels

Alleen 2 gelijksoortige wortels kunnen worden samen genomen tot één wortel
(zie gelijksoortige termen)

vb. $4\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

$\sqrt{41} + \sqrt{14}$ dit kan je niet eenvoudiger schrijven

b. Vermenigvuldigen van wortels : $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

vb. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$

c. Delen van wortels : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

vb. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$
$\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = \sqrt{2}$

d. Vereenvoudigen van wortels

Als er een wortel in het antwoord voorkomt en er wordt niet gevraagd naar een benadering, is het gebruikelijk de wortels zover mogelijk te vereenvoudigen.
Dit betekent dat je zoveel mogelijk kwadraten buiten de wortel brengt.

vb. $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$
$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
$\sqrt{24} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

5. Algebraïsche producten

Een techniek die veel wordt toegepast op algebraïsche vormen is het herleiden van producten tot een som of een verschil. We herkennen daarbij een aantal veel voorkomende technieken.

1. 1^e Algemeen product : a(b + c) = ab + ac

vb. $3x(2x - 6) =$
$6x^2 - 18x$

2. 2^e Algemeen product : (a + b)·(c + d) = ac + ad + bc + bd

vb. $(2x + 3)(3x - 6) =$
$6x^2 - 12x + 9x - 18 =$
$6x^2 - 3x - 18$

3. 1^e Bijzondere product : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

vb. $(3x - 4)(3x + 4) =$
$9x^2 - 16$

4. 2^e Bijzondere product : $(x + 5)(x + 7) = x^2 + 12x + 35$

De 2^e term ontstaat uit de *som* van 5 en 7 en de 3e term uit het *product* van 5 en 7.

vb. $(x - 4)(x + 9) =$
$x^2 + 5x - 36$
vb. $(p - 6)(p - 5) =$
$p^2 - 11p + 30$

5. 3^e Bijzondere product : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

De middelste term noemt men het *dubbelproduct*.

vb. $(x + 7)^2 =$
$x^2 + 14x + 49$
vb. $(2x - 3)^2 =$
$4x^2 - 12x + 9$

6. <u>Ontbinden in factoren</u>

Dit betekent dat een som van termen wordt geschreven als product. We kennen daarvoor een aantal methoden. De methoden zijn afgeleid van de <u>algebraïsche producten</u>

a. Gemeenschappelijke factor buiten haakjes halen

vb. $4x^2 - 8x =$
$4x(x - 2)$
vb. $6a^2b - 3ab^2 =$
$3ab(a - b)$
vb. $-14x^3 + 21x^2 - 7x =$ (neem het min-teken mee naar buiten)
$-7x(x^2 - 3x + 1)$

b. Som-product methode

vb. $x^2 + 5x + 6 =$
$(x + 3)(x + 2)$ want $3 + 2 = 5$ en $3 \times 2 = 6$
vb. $p^2 - 3p - 10 =$
$(p - 5)(p + 2)$ want $-5 + 2 = -3$ en $-5 \times 2 = -10$

c. Verschil van 2 kwadraten

vb. $x^2 - y^2 =$
$(x - y)(x + y)$
vb. $a^2 - 16 =$
$(a - 4)(a + 4)$
vb. $9a^2 - 25b^2 =$
$(3a - 5b)(3a + 5b)$

7. Eerstegraads vergelijkingen

Het *oplossen van de vergelijking* is het zoeken naar een getal, dat er na invulling voor x er een ware bewering van maakt.

vb. $2x + 7 = 3x + 2$ heeft als oplossing $x = 5$
want $2{\cdot}5 + 7 = 3{\cdot}5 + 2$ $(17 = 17)$

De methode die we hier gebruiken is de **balans-methode**
Je mag aan beide kanten van het "=" teken met hetzelfde getal vermeerderen, verminderen, vermenigvuldigen en delen, zonder dat de oplossing verandert.

vb.	$2x + 7 = 3x + 2$	[–3x]
	$-x + 7 = 2$	[–7]
	$-x = -5$	[· -1]
	$x = 5$	
vb.	$^1/_2x - 3 = 1^2/_3x + 3$	[· 6]
	$3x - 18 = 10x + 18$	[–10x]
	$-7x - 18 = 18$	(+18]
	$-7x = 36$	[:-7]
	$x = -\dfrac{36}{7} = -5\dfrac{1}{7}$	

8. Eerstegraads ongelijkheden

Het *oplossen van de ongelijkheid* is het zoeken naar getallen zo, dat er na invulling voor x een ware bewering ontstaat.

De methode die we hier gebruiken is lijkt sterk op de **balans-methode** van de eerstegraads vergelijkingen, maar er is een belangrijk verschil.

Je mag aan beide kanten van het "=" teken met hetzelfde getal vermeerderen, verminderen, met een positief getal vermenigvuldigen en door een positief getaldelen, zonder dat de oplossing verandert. **Echter vermenigvuldig je met of deel je door een negatief getal, dan slaat het teken om.**

vb.	$4x + 7 > x + 1$	[–x]
	$3x + 7 > 1$	[–7]
	$3x > -6$	[: 3]
	$x > -2$	
vb.	$2(x - 1) < 3(2x + 5)$	[haakjes wegwerken]
	$2x - 2 < 6x + 15$	[–6x]
	$-4x - 2 < 15$	[+2]
	$-4x < 17$	[:-4]
	$x > -4^1/_4$	

9. Tweedegraads vergelijkingen

Het *oplossen van de vergelijking* is het zoeken naar getallen zo, dat er na invulling voor x een ware bewering ontstaat.

vb. $x^2 + x = 12$ heeft twee oplossingen, nl. -4 en 3,
want $(-4)^2 + (-4) = 12$ en $3^2 + 3 = 12$

De methode om deze vergelijkingen op te lossen berust op het volgende principe:

Een product is gelijk aan nul als een van de factoren gelijk aan nul is.

In formule: als $a \cdot b = 0$ dan moet gelden $a = 0$ of $b = 0$

De methode:
- werk eventuele haakjes weg,
- herleid de vergelijking op nul,
- ontbind het linkerlid in factoren (zie ontbinden in factoren),
- pas toe: $ab = 0$ d.w.z. $a = 0$ of $b = 0$,
- werk de twee eerstegraads vergelijkingen verder uit.

vb. $x^2 + x = 12$ (op nul herleiden)
$x^2 + x - 12 = 0$ (ontbinden in factoren; som-product-methode)
$(x + 4)(x - 3) = 0$
$x + 4 = 0$ of $x - 3 = 0$
$x = -4$ of $x = 3$

vb. $-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$ (ontbinden in factoren: gemeenschappelijke factor)
$-\frac{1}{2}x(x - 6) = 0$
$-\frac{1}{2}x = 0$ of $x - 6 = 0$
$x = 0$ of $x = 6$

vb. $x^2 = 16$ (op nul herleiden)
$x^2 - 16 = 0$ (ontbinden in factoren: verschil van 2 kwadraten)
$(x - 4)(x + 4) = 0$
$x - 4 = 0$ of $x + 4 = 0$
$x = 4$ of $x = -4$

nb. vaak zal je bij dit type het antwoord snel kunnen geven en kan je alle stappen overslaan.
$x^2 = 16$
$x = 4$ of $x = -4$

10. Vervolg 2^e graadsvergelijkingen

Als het linkerlid van de vergelijking niet eenvoudig is te ontbinden, dan is er nog een alternatieve methode, de **abc-formule**
De vorige methode is voor het algemeenste geval afgeleid en dit levert dan een formule op.

We gaan uit van de algemene vorm: $\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$

We berekenen eerst de **Discriminant** $\boxed{D = b^2 - 4ac.}$

Daarna kunnen we de oplossingen berekenen uit:

$$\boxed{x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}}$$

vb. $2x^2 - 3x - 4 = 0$

$a = 2$, $b = -3$ en $c = 4 \Rightarrow D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 9 + 32 = 41$

$x = \dfrac{3-\sqrt{41}}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{41}$ of $x = \dfrac{3+\sqrt{41}}{4} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{41}$

(controleer met je rekenmachine dat het antwoord goed is!)

vb $8x^2 + 6x + 2 = 1$ [–1]
$8x^2 + 6x + 1 = 0$,

dan $a = 8$, $b = 6$ en $c = +1$ en $D = 6^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 36 - 32 = 4$

$x = \dfrac{-6-\sqrt{4}}{16} = \dfrac{-6-2}{16} = -\dfrac{8}{16} = -\dfrac{1}{2}$ of $x = \dfrac{-6+\sqrt{4}}{16} = \dfrac{-6+2}{16} = \dfrac{-4}{16} = -\dfrac{1}{4}$